"Θεμελ. Εν."

Ορισμός

Έστω A, B δύο σύνολα.
Λέμε ότι το A είναι "μικρότερο ή ισο πληθικά" από το B
αν υπάρχει $f: A \to B$ 1-1
Όταν συμβαίνει αυτό, θα γράφουμε $A \leqslant B$ (ή $B \geqslant A$)

Ορισμός: Αν A, B δύο σύνολα, λέμε ότι το A είναι "γνήσια μικρότερο πληθικά" από το B αν $A \leqslant B$ και $A \not\approx B$.

(δηλ. υπάρχει $f: A \to B$ 1-1 αλλά δεν υπάρχει $g: A \to B$ 1-1 κ' επί)

Παρατηρήσεις: (α) $A \leqslant A$ για κάθε σύνολο A [Εφόσον η ταυτοτική συνάρτηση $\iota_A: A \to A$ είναι 1-1.]

(β) Αν $A \leqslant B$ και $B \leqslant \Gamma$ τότε $A \leqslant \Gamma$

Απόδειξη: Εφόσον $A \leqslant B$, υπάρχει $f: A \to B$ 1-1
—"— $B \leqslant \Gamma$, —"— $g: B \to \Gamma$ 1-1

Τότε η $g \circ f: A \to \Gamma$ είναι 1-1. Άρα $A \leqslant \Gamma$. Έχουμε δει στα (α), (β) ότι $\leqslant$ είναι αυτοπαθής και μεταβατική.

Η $\leqslant$ δεν είναι αντισυμμετρική

Για τα σύνολα $\{1\}, \{2\}$ ισχύει $\{1\} \leqslant \{2\}$, $\{2\} \leqslant \{1\}$
αλλά $\{1\} \neq \{2\}$.

γιατί $f: 2 \to 1$ είναι 1-1

Η $\leqslant$ δεν είναι συμμετρική

$\{1\} \leqslant \{1,2\}$ ενώ δεν ισχύει $\{1,2\} \leqslant \{1\}$.

Έχουμε αποδείξει παραπάνω ότι για δύο σύνολα A, B

$\exists\, f: A \to B$ 1-1 $\iff$ $\exists\, g: B \to A$ επί

$\Updownarrow$

$A \leq B$

Θεώρημα "Schröder - Bernstein"

Αν $A \leq B$ και $B \leq A$, τότε $A \simeq B$ (είναι ισοπληθικά).

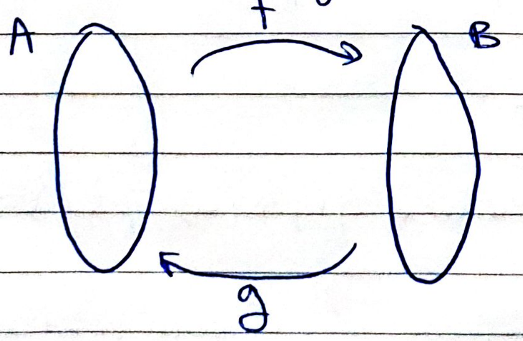
Δηλ. αν $\exists$ $\left.\begin{array}{ll} f: A \to B & 1\text{-}1 \\ g: B \to A & 1\text{-}1 \end{array}\right\} \to$ τότε υπάρχει συνάρτηση $h: A \to B$ 1-1 και επί.

Απόδειξη: (με βοήθεια η υπενθύμιση)

Υπενθύμιση, έχουμε αποδείξει ότι αν A είναι ένα σύνολο και $\varphi: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ μια αύξουσα ως προς $\subseteq$ συνάρτηση, δηλ. $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$.
αύξουσα
Τότε υπάρχει $D \in \mathcal{P}(A)$ τ.ω $\varphi(D) = D$.

Έστω $f: A \to B$ 1-1
$g: A \to B$ 1-1

Ορίζουμε την συνάρτηση
$\varphi: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ με τον
εξής τύπο:
$\varphi(S) = A \setminus g(B \setminus f(S))$



Τότε η φ είναι αύξουσα ως προς $\subseteq$ συνάρτηση
Πράγματι αν, $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ με $X \subseteq Y$
$\Rightarrow f(X) \subseteq f(Y) \Rightarrow B \setminus f(Y) \subseteq B \setminus f(X)$
$\Rightarrow g(B \setminus f(Y)) \subseteq g(B \setminus f(X)) \Rightarrow A \setminus (B \setminus f(X)) \subseteq A \setminus g(B \setminus f(Y))$.

$\Rightarrow \quad \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$

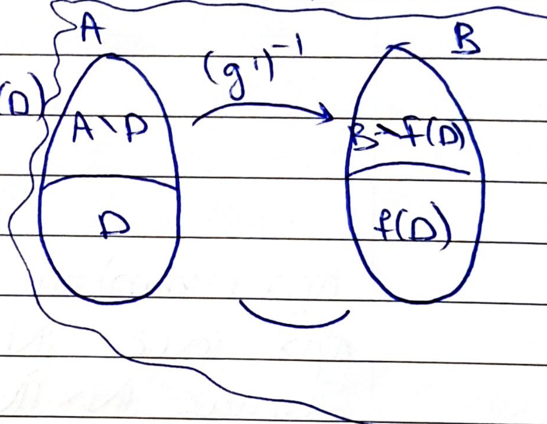
Επομένως υπάρχει $D \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $\varphi(D) = D$

δηλ. $A \setminus g(B \setminus f(D)) = D$

συμπληρωματικό μέσα στο A.

Άρα συμπεραίνουμε: $A \setminus D = g(B \setminus f(D))$.

Εφόσον η g είναι 1-1, ο περιορισμός g' της g στο $B \setminus f(D)$ δηλ. η συνάρτηση $g' = g|_{B \setminus f(D)} : B \setminus f(D) \to A \setminus D$. 1-1 και επί



Άρα ορίζεται η $(g')^{-1} : A \setminus D \to B \setminus f(D)$ και είναι 1-1 και επί

Ορίζουμε $r : A \to B$ με

$$r(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ (g')^{-1}(x), & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Η r είναι 1-1 κ επί

άρα $A \simeq B$

Από η ζητούμενο

<u>Πρόταση</u>: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$

<u>Αποδ</u>: $1^{ος}$ τρόπος (έμμεσος)

Σύμφωνα με το Θεώρημα (S-Bilstein) αρκεί νδο

$\mathbb{N} \leq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq \mathbb{N}$

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ | $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n,m) = 2^n 3^m$

προφανώς η f είναι 1-1

Η g είναι 1-1: $g(n,m) = g(k,\lambda) \Rightarrow 2^n \cdot 3^m = 2^k \cdot 3^\lambda$

Αν $n<k$: $\underbrace{2^{n-k} \cdot 3^m}_{\downarrow} = \underbrace{3^\lambda}_{\downarrow}$

(άρτιος = περιττός) → ΑΤΟΠΟ.

Ομοίως αποδεικνύεται να ισχύει ότι $k<n$. Άρα $k=n$

Εφόσον $k=n$, έχω ότι: $2^n \cdot 3^m = 2^k \cdot 3^\lambda$

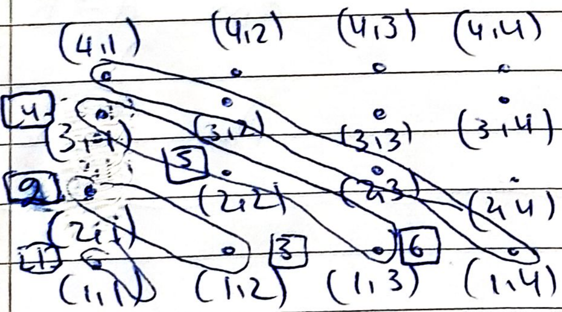
$$\cancel{2^n} \cdot 3^m = \cancel{2^n} \cdot 3^\lambda$$

$$3^m = 3^\lambda$$

$$m = \lambda.$$

Άρα $(n,m) = (k,\lambda)$. Άρα g: 1-1.
Άρα ισχύει $\mathbb{N} \leq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ και $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \leq \mathbb{N}$
Συνεπώς $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.

2η απόδειξη



$n+m-2$

$1+2+\ldots+(n+m-2)$

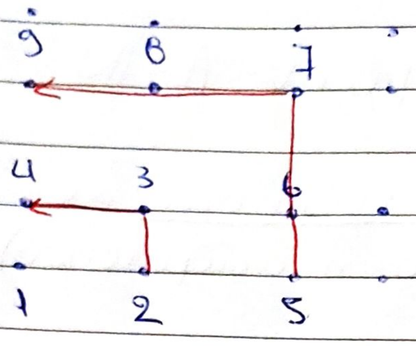
$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n,m) = \frac{(n+m-2)(n+m-1)}{2} + m$$

f 1-1 και επί

No. Date

3η απόδειξη



$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n,m) = \begin{cases} (m-1)^2 + n, & n \leq m \\ (n-1)^2 + (2n-m) & \text{αν } n > m \end{cases}$$

4η απόδειξη

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n,m) = 2^{n-1}(2m-1)$ είναι 1-1 και επί

<u>Παρατήρηση</u>: Για κάθε άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ ισχύει $A \simeq \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\alpha_1 = \min A$

Αν έχουν οριστεί τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Ορίζουμε $\alpha_{n+1} = \min(A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\})$.

Τότε $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

δηλ. η απ $f : \mathbb{N} \to A$ είναι 1-1 και επί.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται αριθμήσιμο αν $A \simeq \mathbb{N}$

Ένα σύνολο A λέγεται το πολύ αριθμήσιμο αν $A \leq \mathbb{N}$
(δηλ. αν A είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο).

Σημείωση: Συχνά χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία ο όρος αριθμήσιμο ως μετάφραση του countable για $A \leq \mathbb{N}$.

Παράδειγμα: Το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.
Οι άρτιοι φυσικοί είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Πρόταση: Έστω A ένα σύνολο $A \neq \emptyset$.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Το A είναι το πολύ αριθμήσιμο
(ii) Υπάρχει $f : A \to \mathbb{N}$, 1-1
(iii) Υπάρχει $: \mathbb{N} \to A$, 1-1.

Απόδειξη: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) είναι ο ορισμός

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αν $f : A \to \mathbb{N}$ 1-1
τότε η $f : A \to f(A)$ 1-1 και επί

Επιλέγουμε $a \in A$ τυχαίο. Ορίζουμε $g : \mathbb{N} \to A$

$$g(n) = \begin{cases} x & n \in f(A) \text{ με } f(x) = n \\ a, & n \notin f(A). \end{cases}$$

Η g είναι επί

No. Date

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Έστω $g: \mathbb{N} \to A$ επί

Για κάθε $\alpha \in A$ το $g^{-1}(\{\alpha\})$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$.
Άρα έχει ελάχιστο στοιχείο.
Επίσης για $\alpha, \beta \in A$ με $\alpha \neq \beta$ $g^{-1}(\{\alpha\}) \cap g^{-1}(\{\beta\}) = \emptyset$.

Ορίζουμε $f: A \to \mathbb{N}$ με $f(\alpha) = \min(g^{-1}\{\alpha\})$. Η f: 1-1.

<u>Πρόταση</u>: Η ένωση το πολύ αριθμήσιμου πλήθους (το πολύ) αριθμήσιμων συνόλων είναι (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο.

Δηλ. αν I (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο και $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια συνόλων ώστε κάθε A_i (το πολύ) αριθμήσιμο τότε το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι (το πολύ) αριθμήσιμο.

<u>Απόδειξη</u>: $\exists f: \mathbb{N} \to I$ επί $\forall i \in I$
$\exists g_i: \mathbb{N} \to A_i$ επί

Ορίζουμε $\sigma: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$

$\sigma(n, m) = g_{f(n)}(m)$

Η σ είναι επί
Αν $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ επί
τότε η $\sigma \circ h$ $\mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ είναι επί

No. Date

Άρα το $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

<u>Πρόταση</u>: Αν A, B (το πολύ) αριθμήσιμα σύνολα τότε το $A\times B$ είναι (το πολύ) αριθμήσιμο

<u>Αποδ</u>: Αν $A=\emptyset$ ή $B=\emptyset$ τότε $A\times B=\emptyset$

Αν $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ $\exists f: \mathbb{N}\to A$ επί
$\exists g: \mathbb{N}\to B$ επί

Τότε η $\varphi: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to A\times B$ με $\varphi(n,m)=(f(n),g(m))$ είναι επί.

Έτσι αν $\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι επί
τότε $\varphi\circ\sigma: \mathbb{N}\to A\times B$ είναι επί

<u>Πρόταση</u>: Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

<u>Αποδ</u>: Τα σύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα
άρα το $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

Η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$
$\varphi(m,n)=\frac{m}{n}$ είναι επί

Αν $g: \mathbb{N}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ είναι επί
τότε η $\varphi\circ g\ \mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ είναι επί
άρα $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε σύνολο X, $X<\mathcal{P}(X)$
(Ισοδύναμα δεν υπάρχει $f: X\to\mathcal{P}(X)$ επί